

Влияние динамических сосредоточенных нагрузок на точность определения параметров деформирования трубопроводных систем

**Берковский А.М., *Киреев О.Б., **Синицын Е.Н., **Ушаков И.В., **Шарин А.Б., (*ЦКТИ – Вибросейсм, г. Санкт Петербург, ** Инженерный центр прочности Министерства атомной энергии, г. Москва,)*

Исследуется напряженно-деформированное состояние участка трубопроводной системы, нагруженной сосредоточенной поперечной силой. Рассматривается влияние сосредоточенных динамических нагрузок на точность вычисления силовых факторов в трубопроводах при использовании метода разложения по формам колебаний. Приводятся результаты решения тестовой задачи различными методами; показывается необходимость статической коррекции.

1. ВВЕДЕНИЕ

Расчетные программы, ориентированные на решение задач статики и динамики трубопроводных систем, обычно основываются на методе конечных элементов (МКЭ). Распространенный подход к моделированию трубопроводной системы в МКЭ заключается в рассмотрении её как пространственной стержневой статически неопределимой системы, состоящей из прямолинейных и криволинейных отрезков труб. Труба считается одномерным объектом — балкой кольцевого сечения, которая может работать на растяжение–сжатие, изгиб и кручение. Соответствующий такой трубе конечный элемент имеет шесть степеней свободы в каждом узле: три поступательных и три угловых (повороты сечений). Элемент может учитывать интенсификацию напряжений в узлах, слой изоляции, находящуюся внутри жидкость или газ, коррозию стенок и т.п.. Спецификой криволинейных трубопроводных элементов является учет изменения их жесткости в зависимости от оваллизации сечений и внутреннего давления. Такой способ моделирования трубопровода неизбежно предполагает представление некоторых видов внешних нагрузок (например, внешние силы от элементов арматуры, действие струй теплоносителя высокого давления при наличии течи и т.д.) как сосредоточенных сил, приложенных в узлах КЭ модели. При этом функции распределения силовых факторов по длине не обладают гладкостью (изгибающие моменты) и непрерывностью (поперечные силы). Это обстоятельство вполне естественно в задачах статики, так как применяемые аппроксимации перемещений являются точным решением уравнения изгиба; однако оно может представлять опасность в задачах динамики. Точнее, присутствие в расчётной модели сосредоточенных сил накладывает ограничения на применяемые методы решения динамических задач. Широко распространён метод модальной суперпозиции, дающий обычно значительный выигрыш в объёме вычислений. Однако, как будет показано ниже, его применение может привести к ошибкам в определении силовых факторов.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ И АЛГОРИТМ.

Рассмотрим уравнение движения трубопроводной системы под действием набора сосредоточенных нагрузок, изменяющихся во времени:

$$M * \ddot{u}(t) + C * \dot{u}(t) + K * u(t) = f(t) \quad (1)$$

Здесь M , C , K – матрицы масс, демпфирования и жесткости, $u(t)$ – перемещения узлов трубопроводной системы, $f(t)$ – сосредоточенная в узлах расчетной модели силовая нагрузка, переменная во времени. Используя известное модальное преобразование $u(t) = \Phi_p * y(t)$, уравнение (1) можно представить в виде:

$$\ddot{y}(t) + C_p * \dot{y}(t) + \Omega_p^2 * y(t) = f_p(t) \quad (2)$$

где: Φ_p – матрица, состоящая из p векторов форм собственных колебаний системы ($p < n$, где n – число степеней свободы рассматриваемой системы);

$C_p = \text{diag}(2\omega_i \xi_i) = \Phi_p^T C \Phi_p$ – модальная матрица демпфирования,

$\Omega_p^2 = \text{diag}(\omega_i^2) = \Phi_p^T * K * \Phi_p$ – модальная матрица жесткости,

$f_p(t) = \Phi_p^T * f(t)$ – вектор модальных сил;

ω_i и ξ_i – собственная частота колебаний и модальное демпфирование, соответствующие φ_i -ой форме;

В уравнении (2) включены только низшие p форм собственных колебаний системы, в то время как полное решение системы (1) описывается n формами колебаний.

Если представить правую часть уравнения (1) в виде: $f(t) = f_0 * g(t)$, то вектор внешних сосредоточенных сил f_0 может быть представлен в виде модального преобразования [1]:

$$f_0 = \sum_{i=1}^n K * \varphi_i * \gamma_i \quad (3)$$

откуда, с учетом ортогональности форм колебаний, модальный коэффициент воздействия γ_i может быть записан для каждой формы колебаний в виде:

$$\gamma_i = \frac{1}{\omega_i^2} \varphi_i^T f_0 \quad (4)$$

С другой стороны, уравнение (3) можно представить в виде суммы модальных внешних сил, соответствующих основным низшим p формам колебаний системы (f_p) и модального остатка, соответствующего высшим $n-p$ формам колебаний системы (f_r):

$$f_0 = f_p + f_r = \sum_{i=1}^p K * \varphi_i * \gamma_i + \sum_{i=p+1}^n K * \varphi_i * \gamma_i \quad (5)$$

откуда с учетом (4) получаем:

$$f_r = f_0 - f_p = f_0 - \sum_{i=1}^p K * \varphi_i * \left(\frac{1}{\omega_i^2} \varphi_i^T f_0 \right) \quad (6)$$

Если предположить, что высшие $(n-p)$ форм колебаний не вносят существенный вклад в динамический ответ системы, то для учета отброшенных $(n-p)$ форм колебаний возможно применить процедуру статической коррекции. Это означает, что для определения вектора перемещений от отсеженных форм колебаний (u_r) достаточно решить статическую задачу:

$$f_r = K * u_r \quad (7)$$

откуда следует:

$$u_r = K^{-1} * f_r \quad (8)$$

или, с учетом (6), получаем вычислительную форму для оценки величины u_r на каждом шаге интегрирования уравнения (2) по времени:

$$u_r(t) = \left[K^{-1} * f_0 - \sum_{i=1}^p \varphi_i \left(\frac{1}{\omega_i^2} \varphi_i^T f_0 \right) \right] * g(t) \quad (9)$$

Следует отметить, что в общем случае для корректного решения динамической задачи методом модального разложения число низших форм колебаний p , участвующих в динамическом ответе должно покрывать частотный диапазон внешнего воздействия, в то время как остальные, не включенные в ответ формы колебаний могут быть учтены с помощью вышеописанной процедуры.

3. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ.

Рассмотрим следующую задачу. Шарнирно опертая балка, моделирующая прямолинейный участок трубопровода, деформируется динамически под действием сосредоточенной механической нагрузки (рис. 1, а). Сила $P(t)$ изменяется во времени по закону, представленному на рис. 1, б).

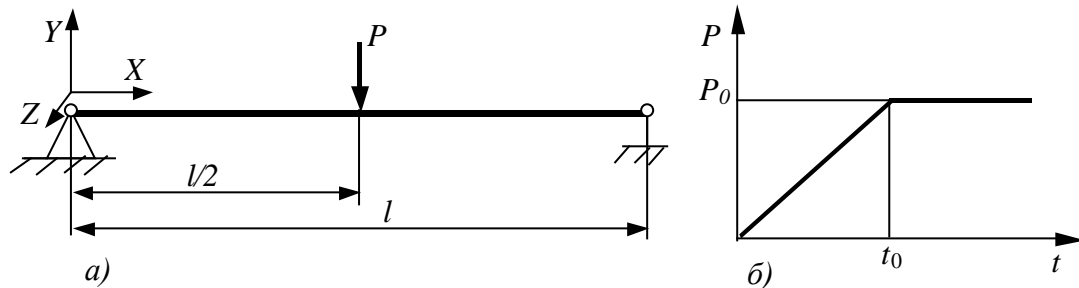


Рис. 1: а – расчетная схема; б – изменение нагрузки во времени

Параметры трубопровода: длина $l = 10$ м, внешний диаметр трубы 0,2 м, толщина стенки 0,05 м; модуль упругости материала $2 \cdot 10^{11}$ Па; плотность материала 7800 кг/м³. Стационарное значение нагрузки $P_0 = 100$ кН. Продолжительность нарастания нагрузки $t_0 = T_1 = 0,225$ с. Здесь T_1 – период колебаний трубопровода по первой форме. Давление в трубопроводе отсутствует. Собственный вес а также затухание не учитываются. Рассматриваются колебания в плоскости XY. В начальный момент перемещения и скорости равны нулю.

Требуется вычислить динамический отклик трубопровода и получить распределения внутренних силовых факторов в стационарном состоянии. Аналитическое решение соответствующей статической задачи $P = P_0$ даёт:

- прогиб $u_{y,max} = P_0 l^3 / 48 E I_z = 0,14147$ м;
- изгибающий момент $M_z = P_0 l / 4 = 250$ кН·м;
- поперечная сила $Q_y = P_0 / 2 = 50$ кН.

Конечно-элементная модель состоит из 40 прямолинейных элементов труба одинаковой длины. В каждом узле рассматриваются только поперечное смещение v и угол поворота θ_z . Деформация поперечного сдвига не учитывается.

Ниже представлены результаты решения данной задачи по программе CAN [2] методом разложения по формам собственных колебаний. Учитывалось 10 первых форм. Шаг интегрирования был принят равным 0.004 с. В таблице 1 численное решение в момент $t = 2$ с сопоставляется с аналитическим.

Таблица 1. Численное решение методом разложения по формам колебаний (программа CAN) при $t = 2$ с

Максимальная величина параметра	Статика	CAN	δ , %
прогиб	0,14147 м	0,14145 м	-0.12
изгибающий момент	250,0 кН·м	240,4 кН·м	-3.72
поперечная сила	50,0 кН	58,20 кН	16.4

Очевидна значительная ошибка в вычислении силовых факторов, вызванная ограничением количества учитываемых в расчёте форм колебаний. Графики, приведённые на рис. 2 – 4, иллюстрируют невозможность точного представления негладких и разрывных функций $M_z(x)$ и $Q_y(x)$ суммой нескольких синусоид.

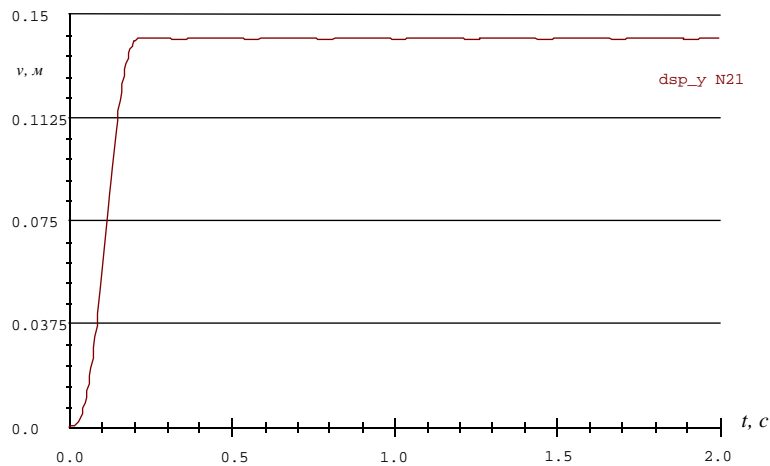


Рис. 2. Зависимость от времени прогиба середины трубопровода

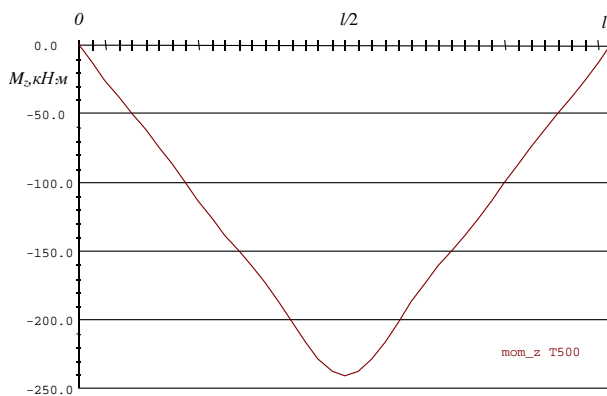


Рис. 3. Распределение изгибающего момента по длине трубопровода при $t = 2$ с

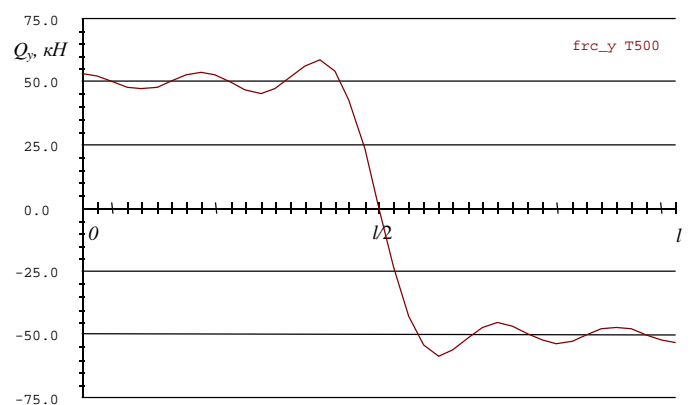


Рис. 4. Распределение поперечной силы по длине трубопровода при $t = 2$ с

Погрешность численного решения, полученного при различном количестве собственных форм, учитываемых в разложении, приводится в таблице 2. За точное решение принято решение статической задачи $P = P_0$.

Таблица 2. Погрешность в определении параметров, %

Количество учитываемых форм	Прогиб	Изгибающий момент	Поперечная сила
1	1,44	18,9	27,2
3	0,226	9,88	19,7
5	0,071	6,60	17,9
7	0,028	4,92	17,2
9	0,014	3,86	16,4
19*	0,00	2,04	15,8

* – трубопровод был разбит на 400 конечных элементов.

Эта же задача была решена с использованием процедуры статической коррекции высших форм колебаний, не учтенных в решении (программа dPIPE, [3]). КЭ модель состояла из 10 элементов. Поскольку заданное динамическое воздействие имеет псевдостатический характер (время выхода на полку соответствует первой частоте собственных колебаний системы), то с точки зрения соответствия частотному составу воздействия, для моделирования динамического ответа системы достаточно учесть лишь несколько первых форм колебаний. Для рассматриваемого примера решение

было получено разложением по первым трем формам собственных колебаний (частоты: 4.44 Гц, 17.73 Гц и 39.71 Гц). Следует отметить, что выбранная длина элемента (1000 мм) гарантирует корректное вычисление всех форм колебаний вплоть до 100 Гц. Для решения динамической задачи использовалось модальное интегрирование уравнений движения. Шаг интегрирования в конечно-разностной пошаговой процедуре решения принимался равным 0.00125 сек, что составляет приблизительно 1/20 от высшей рассматриваемой частоты собственных колебаний системы. Результаты этого расчета представлены на рис. 5 – 8.

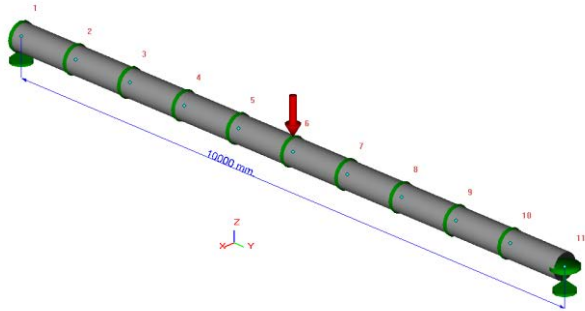


Рис. 5 Расчетная модель трубопровода.

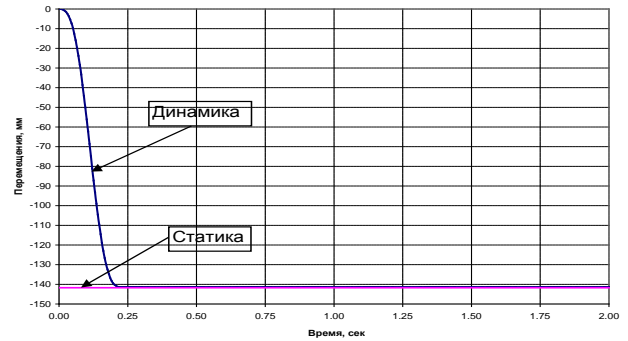


Рис. 6 Перемещения середины пролета (узел 6)

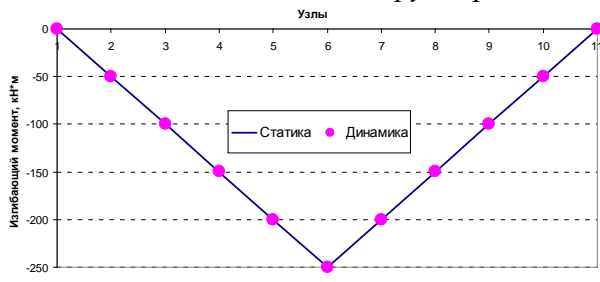


Рис. 7. Распределение изгибающего момента по длине трубопровода при $t = 2$ с

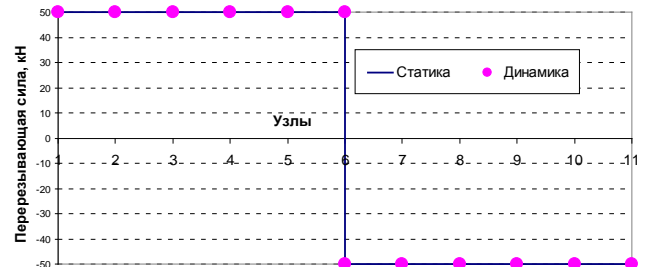


Рис. 8. Распределение поперечной силы по длине трубопровода при $t = 2$ с

И наконец, ниже представлены результаты решения данной задачи по программе CAN методом прямого интегрирования уравнений движения. Шаг интегрирования составлял 0.0004 с. Погрешность решения по программе CAN прямым интегрированием в момент времени $t = 2$ с представлена в таблице 3.

Таблица 3. Численное решение методом прямого интегрирования (программа CAN) при $t = 2$ с

Максимальная величина параметра	Статика	CAN	δ , %
прогиб	0,14147 м	0,14144 м	0,02
изгибающий момент	250,00 кН·м	250,05 кН·м	0,02
поперечная сила	50,00 кН	50,01 кН	0,02

Распределения силовых факторов на рис. 9 и 10, построенные по результатам численного решения в момент $t = 2$ с, хорошо согласуются с соответствующими эпюрами для статической задачи.

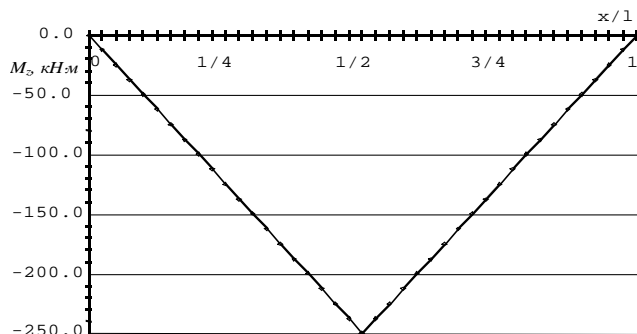


Рис. 9. Распределение изгибающего момента по длине трубопровода при $t = 2$ с. Прямое интегрирование.

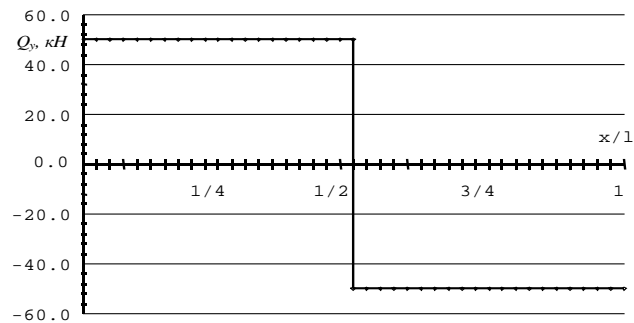


Рис. 10. Распределение поперечной силы по длине трубопровода в момент времени $t = 2.0$ с. Прямое интегрирование.

4. ВЫВОДЫ.

1. В статье приведено описание и алгоритм метода статической коррекции для решения задачи расчета напряженно-деформированного состояния трубопроводных систем под действием сосредоточенных нагрузок с использованием модального метода.
2. Для решения задач в линейной постановке метод модального интегрирования уравнений движения трубопроводных систем обладает преимуществом перед прямым интегрированием как по вычислительным затратам, так и по возможности четкого задания демпфирования в рассматриваемом частотном диапазоне.
3. На примере тестовой задачи показано, что без использования процедуры коррекции высших форм колебаний, метод модального интегрирования может привести к ошибкам в определении внутренних силовых факторов конструкции.
4. Приведенная в статье задача в силу ее простоты и наглядности может быть рекомендована как тестовый пример для разработчиков и пользователей специализированных программных средств.

5. ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. IBRAHIMBEGOVIC AND E. L. WILSON: Automated truncation of Ritz vector basis in modal transformation. J. Engineering Mechanics ASCE, 116(11):2506-2520, 1990.
- [2] Специализированный комплекс программ расчета прочности трубопроводных систем. CANPIPE 2.0 в среде WINDOWS. Комплексный анализ прочности трубопроводов. Москва, Россия 1997.
- [3] Верификационный отчет по программе dPIPE, REP01-01/03-00, ЦКТИ-Вибросейсм, С. Петербург, 2002